

Cálculo Diferencial e Integral

Clase 1: Introducción y Revisión de Conceptos

María Elena García
mgarcia@pol.una.py

Ellen Méndez
emendez@pol.una.py

José A. Riveros
jriveros@pol.una.py



PASEM
PROGRAMA DE APOYO AL SECTOR
EDUCATIVO DEL MERCOSUR



UNIÓN EUROPEA



Contenido

- 1. Reseña Histórica y Motivación.**
- 2. Revisión acerca de Números.**
- 3. Desigualdades y Inecuaciones.**
- 4. Funciones.**

Reseña Histórica

➤ Introducción. Historia

El problema de la estimación de la velocidad.

Reseña Histórica

➤ Introducción. Historia

El problema de la determinación del área.

Motivación

- ¿Por qué estudiar el cálculo?
- *Cálculo integral y cálculo diferencial*

Principales Ramas

➤ *Cálculo diferencial y cálculo integral*

Números-Revisión

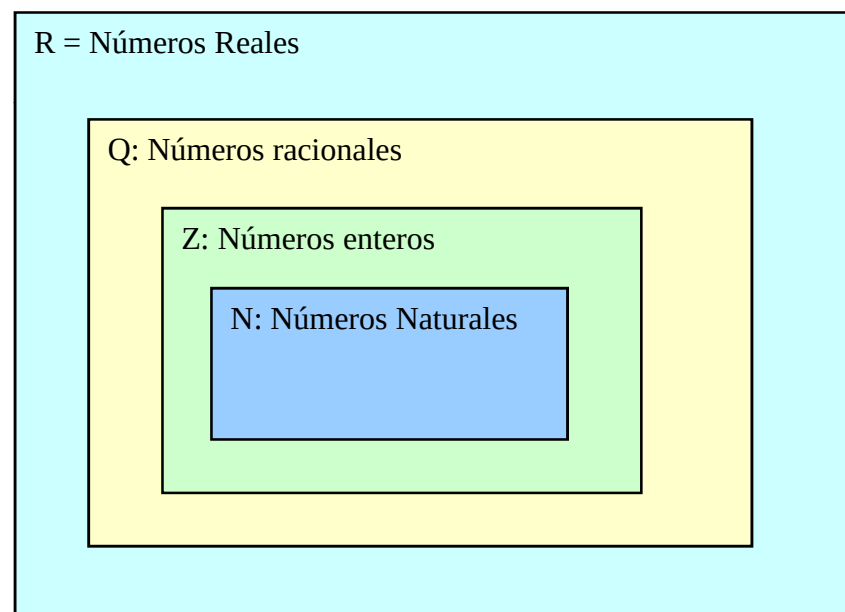
Números Naturales

Números Enteros

Números reales

➤ *Racionales*

➤ *Irracionales*



Propiedades de los números reales

• Axiomas

- Propiedad conmutativa: $x+y = y+x$, $xy = yx$
- Propiedad asociativa: $x + (y + z) = (x + y) + z$, $(xy)z = x(yz)$
- Propiedad distributiva: $x (y + z) = xy + xz$
- Existencia de elementos neutros: $0 + x = x + 0 = x$,
 $x*1 = 1*x = x$
- Existencia del recíproco: Para cada número real $x \neq 0$ existe un número real y tal que $xy = yx = 1$
- Existencia de negativos: Para cada número real x existe un número real y tal que $x + y = y + x = 0$.

Axiomas

- Si x e y pertenecen a $\mathbb{R}^+$, lo mismo ocurre con $x + y$ y también con $x \cdot y$.
- Para todo número real $x \neq 0$, o $x \in \mathbb{R}^+$ o $-x \in \mathbb{R}^+$ pero no ambos.
- $0 \notin \mathbb{R}^+$.
- $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$
- $-(-a) = a$
- $b - a = b + (-a)$
- Si $a + b = b + c$ entonces es $a = c$.
- Si $a \cdot b = a \cdot c$ siendo $a \neq 0$ entonces es $b = c$.

Propiedades de orden

- Tricotomía: Si x e y son números, se cumple una y solo una de las siguientes propiedades: $x < y$ o $x = y$ o $x > y$
- Transitividad: $x < y$ y $y < z \Rightarrow x < z$
- Aditiva: $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$
- Multiplicativa: Cuando z es positivo, $x < y \Leftrightarrow xz < yz$, si es z negativo, $x < y \Leftrightarrow xz > yz$

Valor absoluto o módulo

Se denomina valor absoluto $|a|$ de un número real **a** al número real no negativo, que satisface las condiciones:

$$\begin{cases} |x| = x & \text{si } x \geq 0 \\ |x| = -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Propiedades del valor absoluto (desigualdades)

- El valor absoluto de la suma algebraica de varios números reales no es mayor que la suma de los valores absolutos de sus sumandos

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Propiedades del valor absoluto (desigualdades)

Esta propiedad se denomina desigualdad triangular, pues cuando se generaliza a vectores, indica que la longitud de cada lado de un triángulo no es menor o igual que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

Propiedades del valor absoluto (desigualdades)

- El valor absoluto de la diferencia dos números reales no es menor que la diferencia de los valores absolutos del minuendo y del sustraendo.

$$|x - y| \geq |x| - |y|$$

Propiedades del valor absoluto (desigualdades)

- El valor absoluto del producto de varios números reales es igual que el producto de los valores absolutos de sus factores.

$$|xyz| = |x| * |y| * |z|$$

Tarea : Demostrar esta propiedad.

Propiedades del valor absoluto (desigualdades)

- **El valor absoluto del cociente de dos números reales es igual al cociente de dividir el valor absoluto del dividendo por el del divisor.**

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Tarea: Demostrar la propiedad

Ejercicios de desigualdades:

- Resuelva $x^2 - 1 < 0$

Resuelva $2x + 5 < 13$

Resuelva $3x - 4 \leq 8$

Tarea: Resolver: a) $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$ b) $|x-1| < 3$

Variables

- *Constante*
- *Constantes absolutas*
 - Dominio de definición de una variable
 - *Intervalo abierto*
 - *Intervalo cerrado o segmento*
 - *Intervalo Semiabierto*
 - *Intervalos infinitos*
 - *Entorno*
 - *Variable ordenada*
 - *Variable creciente*
 - *Variable decreciente*
 - *Variables monótonas*
 - *Variable Acotada*

Función

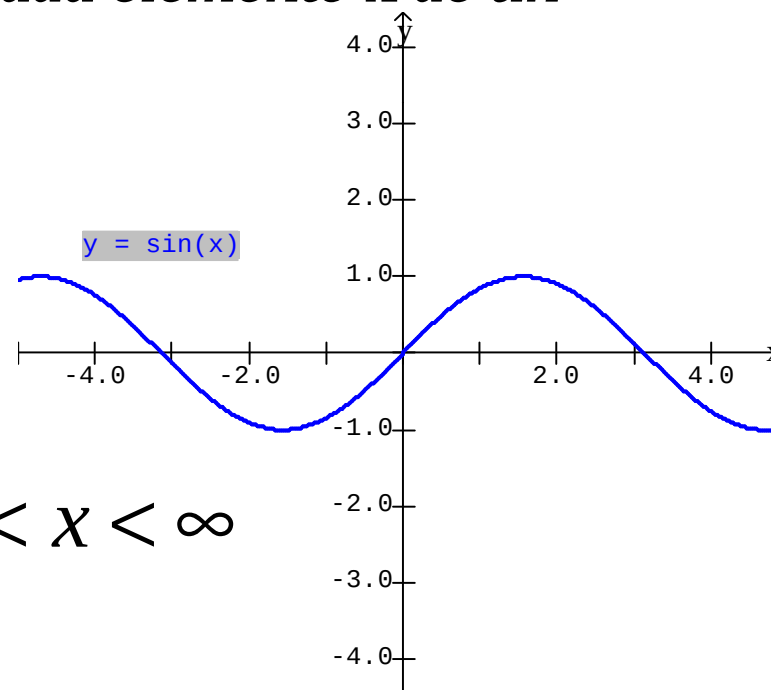
- **Introducción**
 - Las matemáticas con un rostro humano
 - Un poco de historia
 - Ejemplos de funciones en la vida real
- Definición de función
 - Símbolo de la función

Función - Definición

Para dos subconjuntos cualesquiera A y B de la recta real, decimos que:

Una función f es una regla que asigna exactamente un elemento y de un conjunto B a cada elemento x de un conjunto A.

$$y = f(x)$$

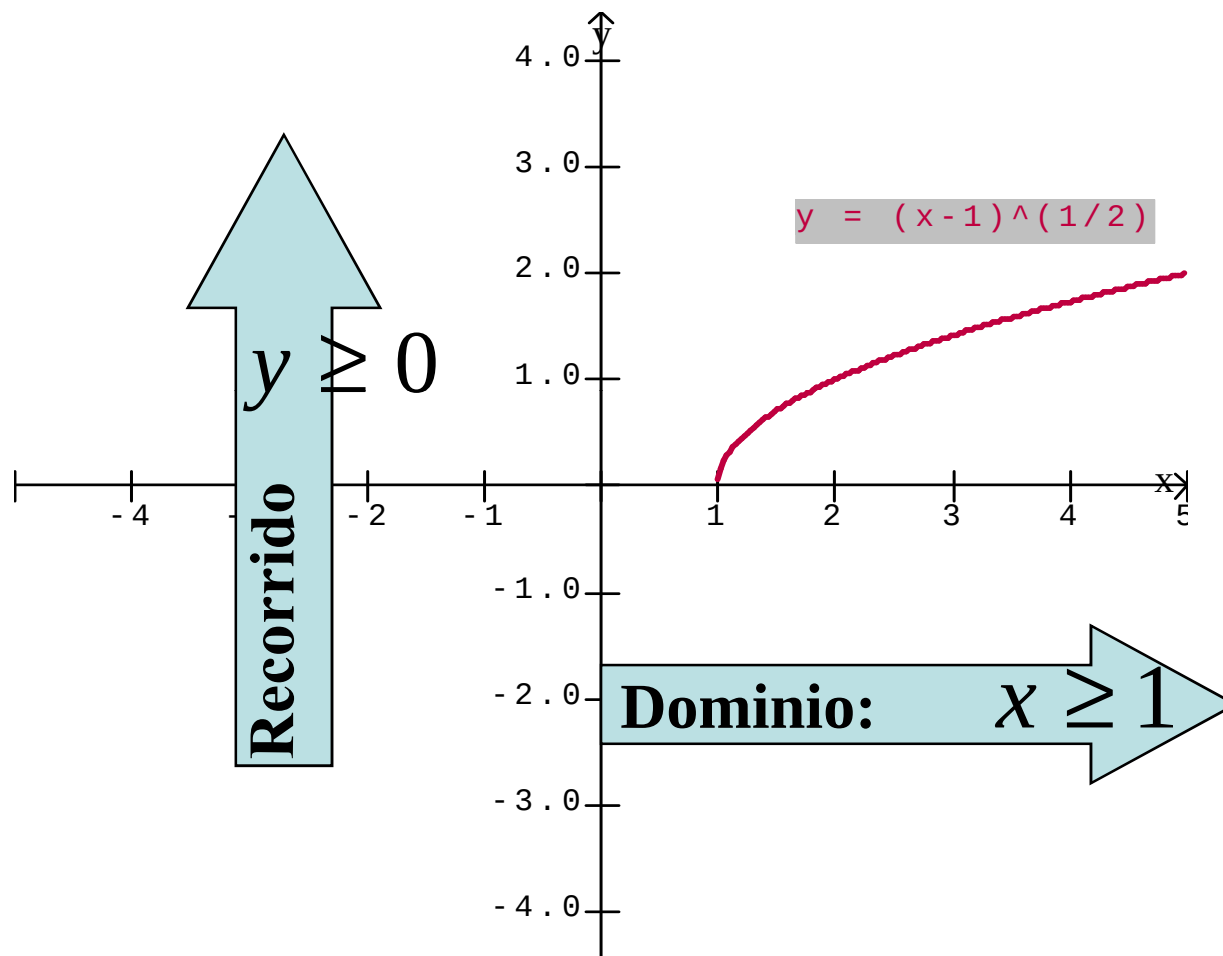


$$-\infty < x < \infty$$

Función

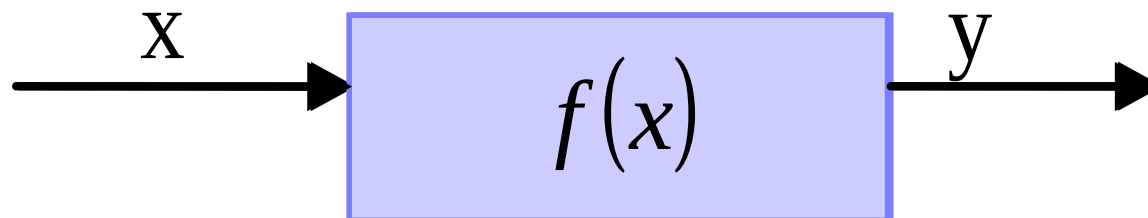
- Variable dependiente e independiente
 - Dependencia Funcional
 - Representación de las variables y de las funciones
- Dominio de definición
 - Dominio Natural
- Rango o Recorrido de una función

Domino y Recorrido de una función



Otra definición de Función

- Una función es una **regla** que opera en una **entrada o argumento x** y produce una **salida y** . Esto puede ilustrarse usando un diagrama de bloques, tal como el que se muestra en el gráfico a continuación.



Ejemplos de funciones

- Evalúe la regla de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x) = 7x + 9$$

$$h(t) = t^3 + 2$$

$$p(x) = x^3 + 2$$

Función. Ejercicios de dominios

- Halle el dominio de las funciones

a) $f(x) = \frac{4}{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

d) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

Función. Tareas para la casa

Determinar el dominio y el recorrido de cada una de las siguientes funciones

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$

c) $f(x) = 5$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Funciones- Clasificación

- Función explícita e implícita
- Función creciente
- Función decreciente
- Funciones uniformes
- Funciones multiformes o polivalentes
- Función periódica
- Función de función o función compuesta

Función. Representaciones

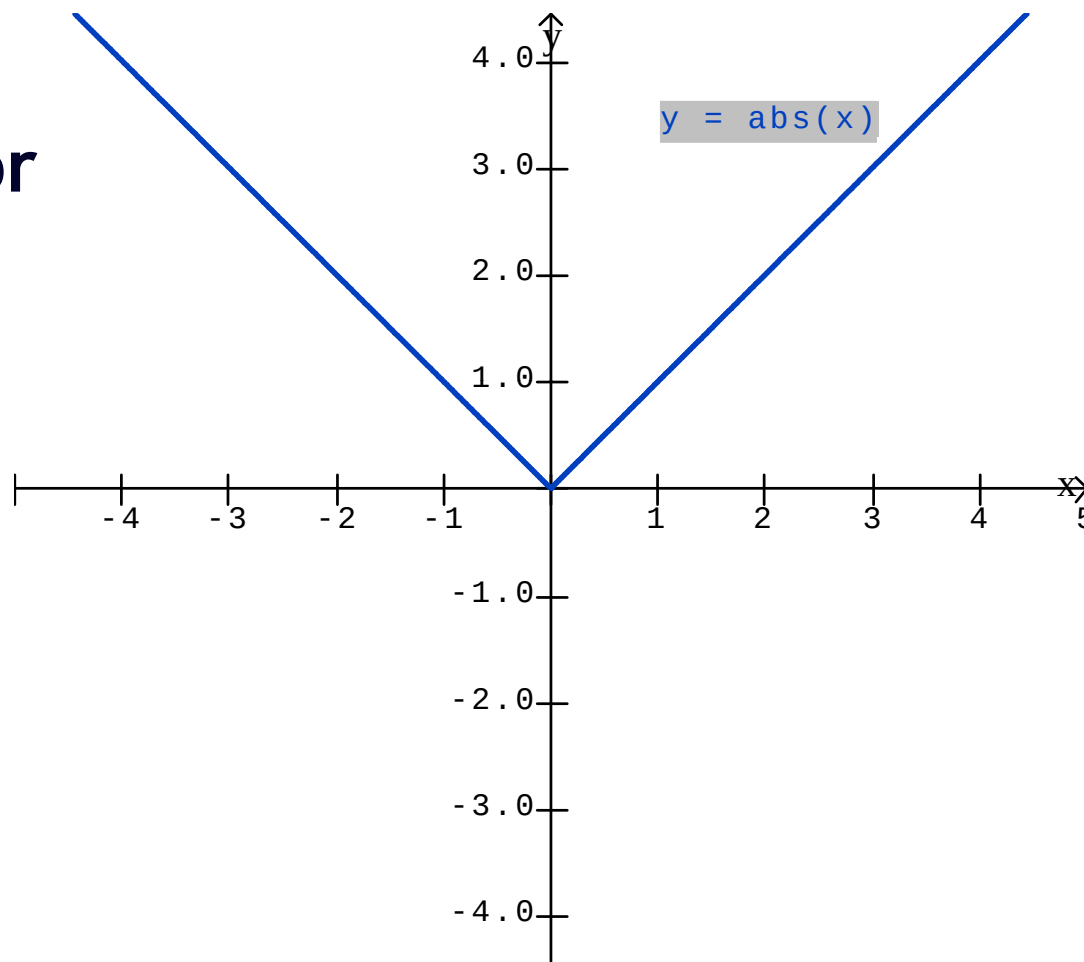
- Representación de las funciones
 - Forma tabular
 - Forma Gráfica
 - Forma Analítica

Funciones elementales

- Función potencial
- Función exponencial
- Función logarítmica
- Función trigonométrica

Funciones elementales- Valor Absoluto

- **Función valor absoluto**



Funciones algebraicas

- Función racional entera o polinomio
- Función racional fraccionaria
- Función irracional

Funciones en coordenadas polares

- Las coordenadas polares determinan la posición de un punto en el plano.
- Se elige un punto 0 del plano que se llama **POLO**, y una semirecta llamada **EJE POLAR**, que tiene su origen en 0.
- La posición en el plano del punto M se determina por dos números: ρ y φ . Donde ρ es la distancia del punto al polo y φ es el ángulo que forma el eje polar con el segmento 0M. Estas son las coordenadas polares del punto M.
- El sentido positivo es el contrario a las manecillas del reloj.

$$\rho = 0.25 * \varphi \quad \text{Espiral de Arquímedes}$$

Funciones acotadas

La función $y = f(x)$ se denomina **acotada** en el dominio de definición de la variable x , si existe un número positivo M tal que para todos los valores de x pertenecientes a dicho dominio se verifica la desigualdad

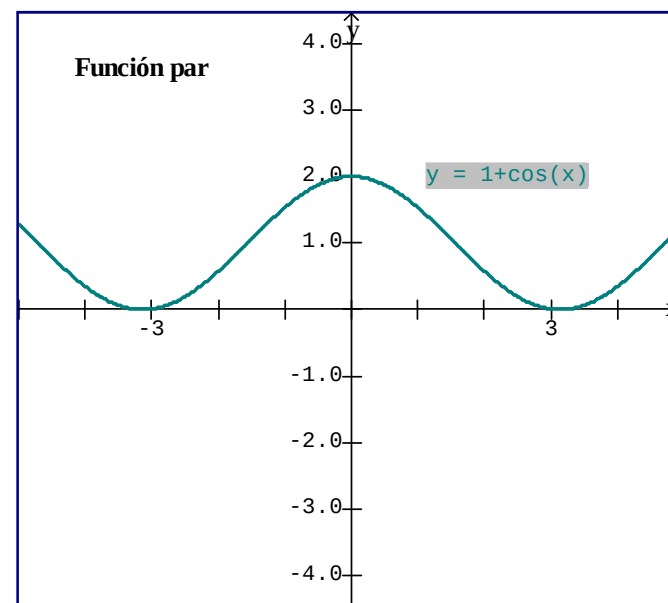
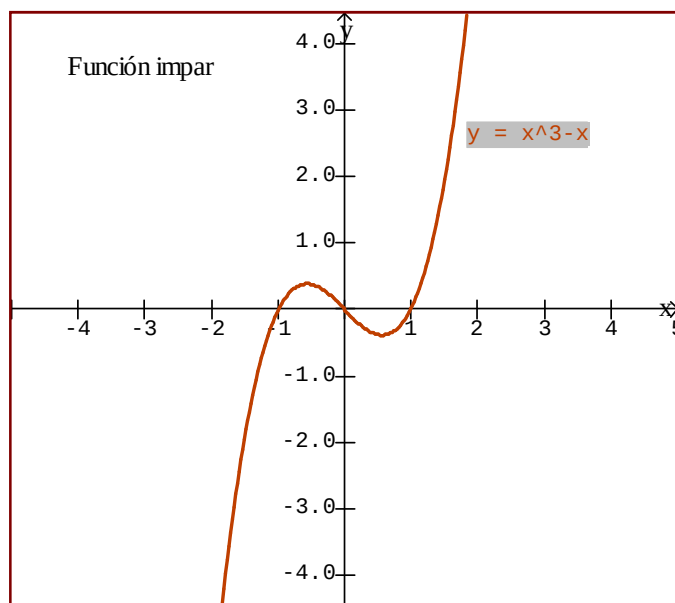
$$|f(x)| \leq M \cdot$$

Si tal número M no existe, se dice que la función $f(x)$ **no es acotada** en dicho dominio.

Funciones par e impar

Se dice que una función es *par* si su gráfica es simétrica respecto al eje y , y se dice que una función es *impar* si su gráfica es simétrica respecto al origen.

- La función $y = f(x)$ es par si $f(-x) = f(x)$.
- La función $y = f(x)$ es impar si $f(-x) = -f(x)$.



Operaciones con funciones

Sean dos funciones $f(x) = 2x - 3$ $g(x) = x^2 + 1$

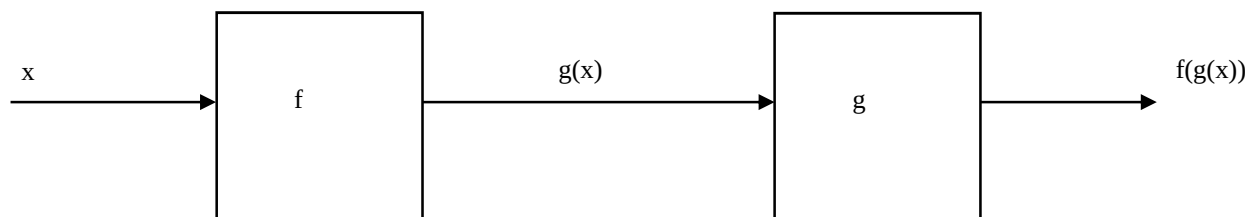
Suma: $f(x) + g(x) = x^2 + 2x - 2$

Diferencia: $f(x) - g(x) = -x^2 + 2x - 4$

Producto: $f(x) * g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$

Cociente: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x - 3}{x^2 + 1}$

Composición: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$



Actividades que empleen recursos Bibliográficos

- **Tema**: Notación Funcional, definiciones, dominio y contradominio, clasificación, propiedades, operaciones.
- **Objetivo**: Hacer una comparación de lo presentado por el profesor contra lo que señalan los diferentes autores de la Bibliografía (presentada al final del programa).
- **Metodología**: Una vez que se consulten los diferentes libros que señala la bibliografía (acudiendo a la biblioteca), a Internet u otros recursos bibliográficos. Hacer un resumen que presente la notación funcional, así como las definiciones de dominio y contradominio, clasificación, operaciones y propiedades, lo presentado por el docente y lo que presentan los diferentes autores.
- **Criterio de Evaluación**: El docente revisará el resumen presentado y la comparación que realizó el estudiante, se califica como aceptada si cumple con el 70% de lo solicitado, sin embargo, es muy importante que cite la bibliografía, incluyendo la página del libro, ya que se considera como el 15% del resumen efectuado.

Bibliografía

1. Anton, Howard Cálculo y geometría Analítica. Vol I y II. Editorial Limusa.
2. Apóstol, Thomas. Calculus. Tomos I y II.
3. Ayres, Frank Jr. Mendelson Elliot. Cálculo Diferencial e integral. Schaum
4. [Demidovich B. Problemas y ejercicios de análisis matemático. Paraninfo.](#)
5. Edwards y Penney. Cálculo con Geometría Analítica. 4ta. Edición. Pearson .Prentice-Hall
6. Farrand, Scott. Cálculo.
7. [Finney, Demana, Waits, Kennedy Cálculo de una variable. Prentice - Hall](#)
8. Granero Francisco. Calculo infinitesimal. McGraw-Hill
9. Hoffman y Bradley. Cálculo. Aplicaciones. Mc Graw-Hill
10. <http://math.exeter.edu/rparris> (Software Winplot)
11. Johnson, R.E./Kiokemeister, F.L. Cálculo con Geometría Analítica.

Bibliografía(2)

12. **Larson / Hostetler / Edwards. Cálculo. Volumen I y II. Mc Graw-Hill.**
13. **Pastor, Calleja, Trejo. Análisis Matemático.**
14. **Piskunov, N. Cálculo Diferencial e Integral. Montaner y Simon S.A.**
15. **Protter / Morrey. Cálculo y Geometría Analítica.**
16. **Purcell, Varbeg, Rigdon. Cálculo. Prentice -Hall**
17. **Sadosky - Guber, Elementos de Cálculo Diferencial e Integral. Librería Alsina.**
18. **Simmons, George. Cálculo y Geometría Analítica. 2da. Edición. McGraw-Hill**
19. **Smith, Robert T./Minton, Roland B. Cálculo. McGrawHill**
20. **Spivak, Michael. Calculus. Cálculo infinitesimal. Segunda Edición. Ed. Reverté**
21. **Stein Sherman K. Cálculo y Geometría Analítica. McGraw-Hill**
22. **Stewart, James Cálculo de una Variable trascendentes tempranas.**
23. **Swokowski, Earl W. Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica.**
24. **Thomas, George B. Jr. Cálculo una variable. 11 ed. Pearson-Addison Wesley.**

Enlace de interés

- <http://hilbert.dartmouth.edu/~m3f02/>
- <http://www.math.harvard.edu> Universidad de Harvard
- <http://math.smith.edu/Local/cicintro/cicintro.html/>
- <http://king.mcs.drexel.edu/~hanton/>
- http://www.mathcentre.ac.uk/staff.php/all_subjects/graphs/simple/
- <http://www.learner.org/channel/courses/learningmath/algebra/session5/index.html>
- <http://math.exeter.edu/rparris/> (Universidad de Exeter, Inglaterra)
- http://www.cnice.mecd.es/Descartes/Análisis/Funciones_polinomicas/
- http://www.cnice.mecd.es/Descartes/Análisis/Funciones_elementales/unidad3.htm
- http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_HCS_1/Limite_en_un_punto_continuidad/Dominio_definicion_funcion_1.htm
- http://www.geocities.com/cscience_sky/composicionfunciones.htm
- http://cariari.ucr.ac.cr/~cimm/cap_03/cap3_3-1.html
- <http://166.114.156.239/teoria&practicos/MT120%2002%20L%20CDMITES%20LATERALES.doc>
- <http://www.okmath.com/enuncia.asp?clave=1D111>
- <http://www.okmath.com/enuncia.asp?clave=1D121>
- http://www.geocities.com/cscience_sky/funcionestrigonometricas.htm
- <http://www.okmath.com/enuncia.asp?clave=1D112>
- <http://www.okmath.com/enuncia.asp?clave=1D113>
- <http://www.okmath.com/enuncia.asp?clave=1D114>
- <http://www.okmath.com/enuncia.asp?clave=1D141>
- <http://www.okmath.com/enuncia.asp?clave=1D1A1>
- <http://www.okmath.com/enuncia.asp?clave=1J51>