

# **Geometría Analítica y Cálculo**

## **Fundamentación**

La Geometría Analítica y el Cálculo Diferencial e Integral, fueron los inventos matemáticos más importantes del siglo XVII. Se destacan los trabajos de los matemáticos franceses Viète, Fermat y Descartes en Geometría Analítica y los trabajos de Newton y Leibniz en Cálculo. Cabe mencionar que estos matemáticos se basaron en resultados logrados por otros grandes matemáticos que les antecedieron.

Las aplicaciones de la Geometría Analítica y el Cálculo son difíciles de cuantificar porque toda la Matemática moderna, de una u otra forma, ha recibido sus influencias; y las distintas ramas de la Matemática interactúan incesantemente con otras ciencias y la tecnología moderna.

Actualmente, la Geometría Analítica y el Cálculo tienen innumerables aplicaciones en Matemática, en ingeniería, en medicina, en la arquitectura, en economía, etc., por lo que manejar las herramientas que ofrecen servirá de base para quienes deseen seguir una carrera técnica o científica.

## **Objetivos**

- Estudiar el sistema de coordenadas rectangulares en el plano.
- Determinar la ecuación de rectas a partir de diferentes elementos.
- Resolver ejercicios que involucren gráficos y ecuaciones de rectas.
- Efectuar las principales operaciones con vectores en el plano.
- Resolver ejercicios que involucren ángulos entre dos vectores en el plano.
- Resolver ecuaciones e inecuaciones elementales en una sola incógnita.
- Determinar el dominio y rango de funciones.
- Resolver ejercicios que involucren gráficos de funciones.
- Distinguir las distintas clases de funciones.
- Operar con funciones.
- Comprender los conceptos de límite y continuidad de una función.
- Calcular límite y determinar la continuidad de una función.
- Determinar el límite de las formas indeterminadas más notables.
- Derivar funciones elementales usando la definición.
- Derivar funciones usando los teoremas.
- Interpretar geoméricamente la derivada de una función.
- Resolver ejercicios que involucren el uso de derivadas.
- Calcular integrales inmediatas e integrales por el método de sustitución.
- Calcular integrales definidas utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo.

## **Unidades Programáticas**

1. Introducción a la Geometría Analítica Plana
2. Vectores en el plano
3. Inecuaciones
4. Funciones
5. Límite de una función
6. Continuidad de una función
7. Derivada de una función
8. Integrales

## **Contenido**

1. Introducción a la Geometría Analítica plana
  - 1.1. La recta numérica
    - 1.1.1. Coordenada o abscisa de un punto en la recta
    - 1.1.2. Distancia entre dos puntos en la recta
    - 1.1.3. Punto medio de un segmento en la recta
    - 1.1.4. División de un segmento en una razón dada en la recta
  - 1.2. El plano cartesiano
    - 1.2.1. Ejes coordenados
    - 1.2.2. Origen de coordenadas
    - 1.2.3. Cuadrantes
    - 1.2.4. Coordenadas de un punto en el plano
      - 1.2.4.1. Abscisa de un punto
      - 1.2.4.2. Ordenada de un punto
    - 1.2.5. Bisectrices de los cuadrantes
    - 1.2.6. Distancia entre dos puntos en el plano

- 1.2.7. Punto medio de un segmento en el plano
- 1.2.8. División de un segmento en una razón dada en el plano
- 1.3. Estudio de la recta
  - 1.3.1. Condición de colinealidad de tres puntos
  - 1.3.2. Inclinación y pendiente de una recta
- 1.4. Ecuación de la recta
  - 1.4.1. Ecuación punto pendiente
  - 1.4.2. Ecuación reducida de la recta
  - 1.4.3. Ecuación segmentaria de la recta
  - 1.4.4. Ecuación general de la recta
  - 1.4.5. Posiciones relativas entre dos rectas
    - 1.4.5.1. Rectas paralelas
    - 1.4.5.2. Rectas coincidentes
    - 1.4.5.3. Rectas concurrentes
      - 1.4.5.3.1. Intersección de rectas
      - 1.4.5.3.2. Rectas perpendiculares
      - 1.4.5.3.3. Rectas oblicuas
  - 1.4.6. Simetría en relación a un punto
  - 1.4.7. Simetría en relación a una recta
  - 1.4.8. Ángulo entre dos rectas
  - 1.4.9. Distancia entre un punto y una recta
  - 1.4.10. Bisectrices de los ángulos formados por dos rectas
  - 1.4.11. Cálculo del área de un triángulo conociendo las coordenadas de sus vértices
- 2. Vectores en el plano
  - 2.1. Definición de vector en el plano cartesiano
  - 2.2. Origen, extremo y componentes de un vector en el plano cartesiano
  - 2.3. Igualdad de vectores
  - 2.4. Módulo de un vector
    - 2.4.1. Módulo de un vector conociendo su origen y su extremo
    - 2.4.2. Módulo de un vector conociendo sus componentes
  - 2.5. Tipos de vectores
    - 2.5.1. Vector libre
    - 2.5.2. Vector fijo
    - 2.5.3. Vector nulo
    - 2.5.4. Vector unitario
    - 2.5.5. Versor de un vector no nulo
    - 2.5.6. Vectores opuestos
    - 2.5.7. Vectores colineales o paralelos
    - 2.5.8. Vectores perpendiculares
  - 2.6. Operaciones con vectores
    - 2.6.1. Adición de vectores
      - 2.6.1.1. Propiedades
      - 2.6.1.2. Interpretación geométrica
      - 2.6.1.3. Adición en forma gráfica
        - 2.6.1.3.1. Método del paralelogramo
        - 2.6.1.3.2. Método del polígono
    - 2.6.2. Sustracción de vectores
      - 2.6.2.1. Sustracción de vectores en forma gráfica
    - 2.6.3. Producto de un escalar por un vector
      - 2.6.3.1. Propiedades
      - 2.6.3.2. Interpretación geométrica
    - 2.6.4. Producto escalar de vectores
      - 2.6.4.1. Propiedades
  - 2.7. Ángulo entre dos vectores
  - 2.8. Relación entre el producto escalar entre dos vectores no nulos y el ángulo formado entre ellos
    - 2.8.1. Interpretaciones del producto escalar
  - 2.9. Vector proyección de un vector sobre otro no nulo
- 3. Inecuaciones
  - 3.1. Desigualdad
    - 3.1.1. Definición
    - 3.1.2. Propiedades básicas
  - 3.2. Intervalos acotados y no acotados
    - 3.1.3. Intervalo abierto
    - 3.1.4. Intervalo cerrado
    - 3.1.5. Intervalo semiabierto (o semicerrado)
  - 3.3. Inecuación en una sola incógnita

- 3.1.6. Definición
- 3.1.7. Resolución de inecuaciones en una sola incógnita
  - 3.1.1.1. Inecuaciones polinómicas de primer grado
  - 3.1.1.2. Inecuaciones polinómicas de segundo grado
  - 3.1.1.3. Inecuaciones polinómicas de cualquier grado
  - 3.1.1.4. Inecuaciones racionales
- 3.4. Valor absoluto
  - 3.3.1. Definición
  - 3.3.2. Propiedades básicas
- 3.5. Ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.
- 4. Funciones**
  - 4.1. Noción intuitiva de función
  - 4.2. Noción de función a través de conjuntos
  - 4.3. Definición de función
  - 4.4. Dominio, codominio y recorrido de una función
  - 4.5. Gráfica de una función en el plano cartesiano
  - 4.6. Formas de representación de una función
    - 3.3.3. Forma tabular
    - 3.3.4. Forma gráfica
    - 3.3.5. Forma analítica
  - 4.7. Funciones explícitas e implícitas
  - 4.8. Algunas funciones elementales
    - 3.3.6. Funciones polinómicas
      - 4.8.1.1. Función constante: Dominio, recorrido y gráfica
      - 4.8.1.2. Función identidad: Dominio, recorrido y gráfica
      - 4.8.1.3. Función cuadrática: Dominio, recorrido y gráfica
    - 3.3.7. Funciones potenciales: Dominio, recorrido y gráfica
    - 3.3.8. Funciones trigonométricas: Dominio, recorrido y gráfica
    - 3.3.9. Funciones exponenciales: Dominio, recorrido y gráfica
    - 3.3.10. Funciones logarítmicas: Dominio, recorrido y gráfica
  - 4.9. Operaciones con funciones
    - 4.9.1. Adición de funciones
    - 4.9.2. Sustracción de funciones
    - 4.9.3. Multiplicación de funciones
    - 4.9.4. División de funciones
    - 4.9.5. Función compuesta
  - 4.10. Función racional: Dominio, recorrido y gráfica
  - 4.11. Función definida a trozos: Dominio, recorrido y gráfica
  - 4.12. Función par y función impar
    - 4.12.1. Propiedades
  - 4.13. Función creciente y función decreciente
  - 4.14. Función inversa
    - 4.14.1. Definición de función sobreyectiva
    - 4.14.2. Definición de función inyectiva
    - 4.14.3. Definición de función biyectiva
    - 4.14.4. Definición de función inversa
    - 4.14.5. Proceso algebraico para el cálculo de la función inversa
- 5. Límite de una función**
  - 5.1. Noción intuitiva
  - 5.2. Límites laterales
  - 5.3. Propiedades de los límites
  - 5.4. Cálculo de límites utilizando las propiedades
  - 5.5. Límite al infinito
  - 5.6. Límites infinitos
  - 5.7. Formas indeterminadas
    - 5.7.1. Indeterminación  $0/0$
    - 5.7.2. Indeterminación  $\infty/\infty$
    - 5.7.3. Indeterminación  $\infty - \infty$
- 6. Continuidad de una función**
  - 6.1. Continuidad de una función en un punto
    - 6.1.1. Definición
    - 6.1.2. Tipos de discontinuidad
      - 6.1.2.1. Discontinuidad evitable
      - 6.1.2.2. Discontinuidad inevitable
  - 6.2. Continuidad de una función en intervalos

7. Derivada de una función
  - 7.1. Derivada de una función en un punto
    - 7.1.1. Definición
    - 7.1.2. Notación
  - 7.2. Interpretación geométrica de la derivada
  - 7.3. Función derivada
  - 7.4. Teorema: Continuidad de funciones derivables
  - 7.5. Reglas de derivación de funciones
    - 7.5.1. Derivada de algunas funciones elementales
      - 7.5.1.1. Derivada de funciones polinómicas
      - 7.5.1.2. Derivada de funciones potenciales
      - 7.5.1.3. Derivada de funciones trigonométricas
      - 7.5.1.4. Derivada de funciones exponenciales
      - 7.5.1.5. Derivada de funciones logarítmicas
    - 7.5.2. Derivada de una constante por una función
    - 7.5.3. Derivada de la suma o de la diferencia de dos funciones
    - 7.5.4. Derivada del producto de dos funciones
    - 7.5.5. Derivada del cociente de dos funciones
    - 7.5.6. Derivada de funciones compuestas
      - 7.5.6.1. Regla de la cadena
  - 7.6. Derivación implícita
  - 7.7. Derivada de funciones trigonométricas inversas
  - 7.8. Derivación logarítmica
  - 7.9. Derivada de orden superior o sucesivas
  - 7.10. Aplicaciones de la derivada
    - 7.10.1. Recta tangente y normal a una curva
    - 7.10.2. Regla de L'Hôpital
8. Integrales
  - 8.1. Integral indefinida
    - 8.1.1. Función primitiva o antiderivada
    - 8.1.2. Integral indefinida
    - 8.1.3. Propiedades de la integral indefinida
    - 8.1.4. Cálculo de integrales indefinidas
      - 8.1.4.1. Integrales inmediatas
      - 8.1.4.2. Integración por el método de sustitución
  - 8.2. Integral definida
    - 8.2.1. Definición
    - 8.2.2. Propiedades
    - 8.2.3. Cálculo de una integral definida
      - 8.2.3.1. Teorema fundamental del cálculo integral (Regla de Barrow)

### **Modalidades de enseñanza**

- Clase teórico-práctica

### **Métodos de enseñanza**

- Exposición
- Demostración
- Aprendizaje cooperativo
- Resolución de ejercicios
- Trabajo individual

### **Recursos didácticos**

- Pizarra
- Marcador
- Borrador
- Materiales bibliográficos
- Internet

### **Bibliografía**

- Giovanni, J., Bonjorno, J., Giovanni, J.Jr. y Acosta, R. (2005). *Matemática Fundamental: volumen único*. São Paulo: FTD.
- Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (2006). *Cálculo con geometría analítica: Volumen I* (8va ed.). México: McGraw-Hill/Interamericana
- Espinoza, E. (2005). *Matemática Básica* (2da. ed.) Lima: Autor
- Mitacc, M. y Toro, L. (2009). *Tópicos de Cálculo Vol. I* (3era. ed.). Lima: THALES S.R.L.

- Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. y Reyes, R. (2009). *Matemáticas simplificadas* (3era. ed.). México: PEARSON EDUCACIÓN.
- Iezzi, G. (2005). *Fundamentos de Matemática Elementar Vol. 7: geometría analítica* (5ta. ed.). São Paulo: Atual.
- Iezzi, G., Murakami, C. y Machado, N. (1993). *Fundamentos de Matemática Elementar Vol. 8: límites, derivadas, noções de integral* (5ta. ed.). São Paulo: Atual.
- Lehmann, C. (1995). *Geometría Analítica*. México: Limusa.
- Ayres, F. (1971). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Mc Graw Hill, México.
- Pino, R. *Cálculo Diferencial e Integral*. Asunción: LA LUQUEÑA Impresiones.
- Bellassai, P. (2007). *Geometría Analítica*. Asunción: Editora Litocolor S.R.L.