

Geometría y Trigonometría

Fundamentación

El estudio de la Geometría aporta una formación lógica y una mayor comprensión en las lecturas, por esto y más, es que “enseña a razonar”. El hábito adquirido durante su estudio resulta provechoso pues, además de ayudar a apreciar los trabajos humanos y lo que ofrece la naturaleza, abarca un dilatado radio en cuanto a aplicaciones. Ellas se relacionan con la aeronáutica, arquitectura, aviación, con el amplio mundo de las ingenierías, ciencias físicas y con una miscelánea de situaciones cada vez más complejas.

En tanto que la Trigonometría, una creación de la matemática griega, surgió debido a las necesidades de la astronomía. Se desarrolló a lo largo de varios siglos y hoy en día compone uno de los instrumentos imprescindibles en diversas áreas: en todas las ramas de la ingeniería, en física, en topografía, en astronomía, etc.

Por lo expuesto, la adquisición de un sólido conocimiento en Geometría y Trigonometría será de gran utilidad en las carreras técnicas o científicas.

Objetivos

- Distinguir los entes geométricos fundamentales.
- Establecer las posiciones relativas de dos rectas en el plano y las propiedades de los ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal.
- Comprender el concepto de ángulo y los distintos sistemas de medición de ángulos.
- Relacionar los distintos sistemas de medición de ángulos.
- Definir triángulo, indicando sus elementos.
- Establecer las propiedades de los triángulos.
- Conocer las principales líneas y puntos notables de un triángulo y sus propiedades.
- Conocer los conceptos de razones y proporciones de segmentos.
- Aplicar semejanza de triángulos en la determinación de longitudes de lados y medidas angulares de un polígono.
- Reconocer triángulos congruentes utilizando los postulados de congruencia.
- Definir polígono en el plano, indicando sus elementos.
- Establecer las propiedades de los polígonos.
- Conocer las propiedades de los elementos que se asocian a la circunferencia y al círculo.
- Estudiar las propiedades de los ángulos que se pueden trazar en la circunferencia.
- Diferenciar las posiciones relativas entre una circunferencia y una recta, y entre dos circunferencias.
- Describir las características de polígonos y cuerpos.
- Distinguir figuras geométricas y cuerpos geométricos.
- Hallar área de figuras planas y de superficies de poliedros y cuerpos redondos.
- Calcular volúmenes de poliedros y cuerpos redondos.
- Definir razones y funciones trigonométricas.
- Conocer las propiedades de las funciones trigonométricas.
- Relacionar las funciones trigonométricas de un mismo arco y de los múltiplos y submúltiplos del arco.
- Aplicar fórmulas trigonométricas en ejercicios y problemas.
- Efectuar transformaciones de fórmulas trigonométricas.
- Verificar identidades trigonométricas.
- Resolver ecuaciones trigonométricas.
- Resolver ejercicios y problemas de triángulos rectángulos
- Resolver ejercicios y problemas de triángulos oblicuángulos.

Unidades Programáticas

1. Entes geométricos fundamentales
2. Polígonos. Nociones generales
3. Triángulos
4. Cuadriláteros
5. Proporcionalidad Geométrica
6. Circunferencia y círculo
7. Áreas de figuras planas
8. Cuerpos geométricos
9. Trigonometría. Nociones preliminares
10. Razones y funciones trigonométricas
11. Relaciones entre funciones trigonométricas
12. Identidades y ecuaciones trigonométricas
13. Resolución de triángulos

Contenido

1. Entes geométricos fundamentales
 - 1.1. Representaciones gráficas y notaciones: Punto, Recta, Semirrecta, Segmento de recta, Plano.
 - 1.2. Posiciones entre rectas
 - 1.2.1. Rectas paralelas. Notación
 - 1.2.2. Rectas perpendiculares. Notación
 - 1.2.3. Rectas coincidentes
 - 1.2.4. Rectas cortadas por una secante
 - 1.2.4.1. Rectas paralelas cortadas por una secante
 - 1.3. Ángulo
 - 1.3.1. Definición. Elementos. Notación
 - 1.3.2. Sistemas de Medida de ángulos: sexagesimal, centesimal, radián
 - 1.3.2.1. Conversión de la medida de un ángulo de un sistema a otro
 - 1.3.3. Ángulo cóncavo y ángulo convexo
 - 1.3.4. Clasificación de ángulos
 - 1.3.4.1. Según su medida: Ángulo nulo, ángulo agudo, ángulo recto, ángulo obtuso, ángulo llano y ángulo completo
 - 1.3.4.2. Según su posición: Ángulos adyacentes, ángulos consecutivos, ángulos opuestos por el vértice
 - 1.3.5. Ángulos complementarios y suplementarios
 - 1.3.6. Ángulos opuestos por el vértice
 - 1.3.7. Bisectriz de un ángulo
2. Polígonos. Nociones generales
 - 2.1. Definición. Notación
 - 2.2. Elementos de un polígono: lados, vértices, ángulos internos, ángulos externos, diagonales.
 - 2.3. Polígono cóncavo y polígono convexo
 - 2.4. Perímetro. Definición.
 - 2.5. Nombre de polígonos (según el número de lados)
 - 2.6. Polígono regular
 - 2.6.1. Definición
 - 2.6.2. Elementos de un polígono regular: centro, radio, apotema, ángulo central
 - 2.7. Propiedades
 - 2.7.1. Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
 - 2.7.2. Número de diagonales de un polígono que se pueden trazar a partir de un vértice
 - 2.7.3. Número (total) de diagonales de un polígono
 - 2.8. Descomposición de polígonos en polígonos más sencillos
3. Triángulos
 - 3.1. Definición. Notación
 - 3.2. Elementos de un triángulo
 - 3.3. Propiedades básicas de un triángulo
 - 3.4. Clasificación y propiedades de los triángulos:
 - 3.4.1. Según sus lados
 - 3.4.1.1. Escaleno
 - 3.4.1.2. Isósceles
 - 3.4.1.3. Equilátero
 - 3.4.2. Según sus ángulos
 - 3.4.2.1. Rectángulo
 - 3.4.2.2. Acutángulo
 - 3.4.2.3. Obtusángulo
 - 3.4.2.4. Equiángulo
 - 3.5. Líneas notables en el triángulo
 - 3.5.1. Mediana
 - 3.5.2. Altura
 - 3.5.3. Bisectriz
 - 3.5.4. Mediatriz
 - 3.6. Puntos notables en el triángulo
 - 3.6.1. Baricentro
 - 3.6.2. Ortocentro
 - 3.6.3. Incentro
 - 3.6.4. Circuncentro
 - 3.7. Propiedades referentes a líneas y puntos notables.
4. Cuadriláteros
 - 4.1. Definición. Notación
 - 4.2. Clasificación
 - 4.2.1. Paralelogramos

- 4.2.1.1. Propiedades generales
 - 4.2.1.2. Clasificación y propiedades particulares
 - 4.2.1.2.1. Rectángulo
 - 4.2.1.2.2. Cuadrado
 - 4.2.1.2.3. Rombo
 - 4.2.1.2.4. Romboide
 - 4.2.2. Trapecios
 - 4.2.2.1. Propiedades generales
 - 4.2.2.2. Clasificación y propiedades particulares
 - 4.2.2.2.1. Trapecio Escaleno
 - 4.2.2.2.2. Trapecio Isósceles
 - 4.2.2.2.3. Trapecio Rectángulo
 - 4.2.3. Trapezoides
 - 4.2.3.1. Propiedades generales
 - 4.2.3.2. Clasificación y propiedades particulares
 - 4.2.3.2.1. Trapezoide Simétrico
 - 4.2.3.2.2. Trapezoide Asimétrico
- 5. Proporcionalidad Geométrica**
 - 5.1. Definición de razón entre dos segmentos
 - 5.2. Segmentos proporcionales
 - 5.2.1. Definición. Elementos
 - 5.3. Propiedades de las proporciones
 - 5.3.1. Aritméticas
 - 5.3.2. Cuarta proporcional
 - 5.3.3. Tercera proporcional
 - 5.3.4. Media proporcional
 - 5.3.5. Series de razones iguales
 - 5.4. Propiedades sobre segmentos proporcionales
 - 5.4.1. Teorema de Thales
 - 5.4.2. Propiedad de base media en un triángulo
 - 5.4.3. Propiedad de la bisectriz en un triángulo
 - 5.5. Semejanza de triángulos
 - 5.5.1. Definición
 - 5.5.2. Criterios de semejanza de triángulos
 - 5.5.2.1. Criterio AA (ángulo, ángulo)
 - 5.5.2.2. Criterio LAL (lado, ángulo, lado)
 - 5.5.2.3. Criterio LLL (lado, lado, lado)
 - 5.5.2.4. Criterio LLA (lado, lado, ángulo)
 - 5.5.3. Proporcionalidad de las alturas de dos triángulos semejantes
 - 5.6. Congruencia de triángulos
 - 5.6.1. Postulados de congruencia de triángulos
 - 5.6.1.1. Postulado ALA (ángulo, lado, ángulo)
 - 5.6.1.2. Postulado LAL (lado, ángulo, lado)
 - 5.6.1.3. Postulado LLL (lado, lado, lado)
 - 5.7. Relaciones métricas en el triángulo rectángulo
 - 5.7.1. Proyección de un punto y de un segmento sobre una recta
 - 5.7.2. Teorema de Euclides
 - 5.7.3. Teorema de Pitágoras
 - 5.7.4. Teorema general de Pitágoras
 - 5.8. Criterios de clasificación de triángulos conociendo las medidas de sus lados
 - 5.8.1. Rectángulo
 - 5.8.2. Acutángulo
 - 5.8.3. Obtusángulo
- 6. Circunferencia y círculo**
 - 6.1. Definición de circunferencia y de círculo
 - 6.2. Elementos de una circunferencia
 - 6.2.1. Arco
 - 6.2.2. Cuerda
 - 6.2.3. Radio
 - 6.2.4. Diámetro
 - 6.3. Posiciones de puntos a la circunferencia
 - 6.3.1. Puntos interiores
 - 6.3.2. Puntos exteriores
 - 6.3.3. Puntos de la circunferencia
 - 6.4. Circunferencias iguales
 - 6.5. Longitud de arco

- 6.6. Longitud de arco de una circunferencia(Perímetro)
 - 6.7. Semicircunferencias y semicírculos
 - 6.8. Posiciones de una recta y una circunferencia
 - 6.8.1.Recta tangente a una circunferencia.
 - 6.8.2.Recta secante a una circunferencia
 - 6.8.3.Recta exterior a una circunferencia
 - 6.9. Ángulos en la circunferencia.
 - 6.9.1.Ángulo central
 - 6.9.2.Ángulo inscrito
 - 6.9.3.Ángulo semi-inscrito
 - 6.9.4.Ángulo ex-inscrito
 - 6.9.5.Ángulo interior
 - 6.9.6.Ángulo circunscripto
 - 6.9.7.Ángulo exterior
 - 6.10. Posiciones relativas de dos circunferencias.
 - 6.10.1. Circunferencias exteriores
 - 6.10.2. Circunferencias tangentes
 - 6.10.3. Circunferencias secantes
 - 6.10.4. Circunferencias interiores
 - 6.10.5. Circunferencias concéntricas
 - 6.11. Circunferencias y polígonos
 - 6.11.1. Polígonos inscritos en una circunferencia
 - 6.11.1.1.Polígono regular inscrito en una circunferencia
 - 6.11.2. Polígonos circunscriptos a una circunferencia
 - 6.11.2.1.Polígono regular circunscripto a una circunferencia
 - 6.11.3. Relaciones métricas en polígonos regulares
- 7. Áreas de figuras planas**
- 7.1. Definición de área
 - 7.2. Figuras planas equivalentes
 - 7.3. Área de triángulos
 - 7.4. Área de cuadriláteros
 - 7.5. Área de polígonos de más de cuatro lados
 - 7.6. Área de un círculo
 - 7.7. Área de figuras en el círculo
 - 7.7.1.Sector circular
 - 7.7.2.Segmento circular
 - 7.7.3.Trapezio circular
 - 7.7.4.Corona circular
- 8. Cuerpos Geométricos**
- 8.1. Definición de cuerpo geométrico o sólido
 - 8.2. Volumen y Capacidad. Definiciones
 - 8.3. Sólidos equivalentes
 - 8.4. Sección de un sólido
 - 8.5. Poliedros
 - 8.5.1.Definición
 - 8.5.2.Elementos de un poliedro
 - 8.5.3.Teorema de Euler para poliedros
 - 8.5.4.Poliedro regular. Propiedades y Fórmulas
 - 8.5.4.1. Tetraedro: Área lateral, área total y volumen
 - 8.5.4.2. Hexaedro o cubo: Área lateral, área total y volumen
 - 8.5.4.3. Octaedro: Área total y volumen
 - 8.5.4.4. Dodecaedro: Área total y volumen
 - 8.5.4.5. Icosaedro: Área total y volumen
 - 8.5.5.Clasificación, propiedades y fórmulas de poliedros
 - 8.5.5.1. Prisma recto
 - 8.5.5.1.1. Definición
 - 8.5.5.1.2. Elementos
 - 8.5.5.1.3. Paralelepípedo
 - 8.5.5.1.4. Prisma recto regular
 - 8.5.5.1.5. Área lateral, área total y volumen
 - 8.5.5.2. Pirámide recta regular
 - 8.5.5.2.1. Elementos
 - 8.5.5.2.2. Área lateral, área total y volumen
 - 8.5.5.3. Tronco de pirámide recta regular
 - 8.5.5.3.1. Elementos
 - 8.5.5.3.2. Área lateral, área total y volumen

8.5.5.4. Aplicación del teorema de Pitágoras en Poliedros

8.6. Cuerpos redondos

8.6.1. Definición

8.6.2. Clasificación, propiedades y fórmulas de cuerpos redondos

8.6.2.1. Cilindro recto circular

8.6.2.1.1. Elementos

8.6.2.1.2. Área lateral, área total y volumen

8.6.2.2. Cono recto circular

8.6.2.2.1. Elementos

8.6.2.2.2. Área lateral, área total y volumen

8.6.2.3. Tronco de cono recto circular

8.6.2.3.1. Elementos

8.6.2.3.2. Área lateral, área total y volumen

8.6.2.4. Esfera

8.6.2.4.1. Elementos

8.6.2.4.2. Área total y volumen

8.6.3. Aplicación del Teorema de Pitágoras en Cuerpos Redondos

9. Trigonometría. Nociones preliminares

9.1. Sistemas de ejes

9.1.1. Coordenadas rectangulares

9.1.2. Coordenadas de un punto

9.2. Ángulos desde el punto de vista trigonométrico

9.2.1. Ángulo positivo

9.2.2. Ángulo negativo

9.2.3. Ángulo en posición normal

9.2.4. Ángulos coterminales

10. Razones y funciones trigonométricas

10.1. Razones, razones recíprocas y co-razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.

10.2. Circunferencia trigonométrica

10.3. Líneas trigonométricas

10.4. Funciones trigonométricas

10.5. Funciones recíprocas y cofunciones de las funciones trigonométricas

10.6. Dominio, variación, periodo, signos, raíces y gráfica de las funciones trigonométricas

10.7. Funciones trigonométricas de los ángulos que limitan los cuadrantes

10.8. Funciones trigonométricas de los ángulos notables. Aplicaciones de los valores de ángulos notables en operaciones aritméticas.

10.9. Funciones trigonométricas inversas

11. Relaciones entre funciones trigonométricas

11.1. Reducción de funciones trigonométricas a otras equivalentes.

11.1.1. Funciones trigonométricas del ángulo $(-x)$

11.1.2. Funciones trigonométricas del ángulo $(\pi/2 \pm x)$

11.1.3. Funciones trigonométricas del ángulo $(\pi \pm x)$

11.1.4. Funciones trigonométricas del ángulo $((3\pi)/2 \pm x)$

11.1.5. Funciones trigonométricas del ángulo $(2\pi \pm x)$

11.2. Otras relaciones importantes

12. Identidades y ecuaciones trigonométricas

12.1. Identidad trigonométrica. Definición

12.1.1. Identidades recíprocas

12.1.2. Identidades pitagóricas

12.1.3. Identidades de la suma de dos ángulos

12.1.4. Identidades de la diferencia de dos ángulos

12.1.5. Identidades del ángulo doble

12.1.6. Identidades del ángulo triple

12.1.7. Identidades del ángulo mitad

12.1.8. Transformaciones de sumas de senos, cosenos y tangentes en producto

12.1.9. Transformaciones de diferencias de senos, cosenos y tangentes en producto

12.1.10. Aplicación de las identidades trigonométricas a los más variados tipos de expresiones trigonométricas.

12.2. Ecuación trigonométrica. Definición

12.2.1. Resolución de los más variados tipos de ecuaciones trigonométricas

- 13. Resolución de triángulos
 - 13.1. Resolución de triángulos rectángulos.
 - 13.1.1. Aplicación de las razones trigonométricas
 - 13.1.2. Ángulo de elevación
 - 13.1.3. Ángulo de depresión
 - 13.2. Resolución de triángulos oblicuángulos
 - 13.2.1. Teorema del seno
 - 13.2.2. Teorema del coseno
 - 13.2.3. Aplicación de los teoremas del seno y coseno a situaciones problemáticas

Modalidades de enseñanza

- Clase teórico-práctica

Métodos de enseñanza

- Exposición
- Demostración
- Aprendizaje cooperativo
- Resolución de ejercicios
- Trabajo Individual

Recursos didácticos

- Pizarra
- Marcador
- Borrador
- Figuras planas y cuerpos geométricos en cartulinas
- Materiales bibliográficos
- Internet

Bibliografía

- Giovanni, J., Bonjorno, J., Giovanni, J.Jr. y Acosta, R. (2005). *Matemática Fundamental: volumen único*. São Paulo: FTD.
- Baldor, J. (2004). *Geometría plana y del espacio: con una introducción a la trigonometría*. México: Grupo Patria Cultural.
- Dolce, O. y Pompeo, J. (2005). *Fundamentos de Matemática Elemental: geometría plana*. São Paulo: Atual.
- Dolce, O. y Pompeo, J. (2013). *Fundamentos de Matemática Elemental: geometría espacial*. São Paulo: Atual.
- Iezzi, G. (1998). *Fundamentos de Matemática Elemental: trigonometría*. São Paulo: Atual.
- Alexander, D., & Koeberlein, G. (2013). *Geometría* (Quinta ed.). (J. L. Cárdenas, Trans.) México: Cengage Learning.
- Campos, X. C., & Schmidt, X. C. (2012). *Geometría* (Segunda ed.). Santiago, Chile: McGraw-Hill.
- Moise, E. E., & Floy L. Downs, J. (1986). *Geometría Moderna*. (M. García, Trans.) Wilmington, Delaware, Estados Unidos: Addison-Wesley.
- Dante, L. R. (2002). *Matemática*. Sao Paulo, Brasil: Ática.
- Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. y Reyes, R. (2009). *Matemáticas simplificadas* (3era. ed.). México: PEARSON EDUCACIÓN.
- Secchia, A. y Montiel, S. (1980). *Problemas de Geometría: Geometría Plana*. Asunción: Comuneros
- Secchia, A. y Montiel, S. (1979). *Problemas de Geometría: Geometría del Espacio*. Asunción: Comuneros.
- Secchia, A. y Pujol, F. (1979). *Ejercicios de Trigonometría*. Asunción: Comuneros.
- Repetto, C. y Fesquet, H. (1968). *Trigonometría y Elementos de Análisis Matemático*. Buenos Aires: Kapelusz.
- Velázquez, M., Bellassai, P., Pino, R., Duré, A., Aranda, T. (2010). *Matemática Básica con Estadística* (4ta. ed.). Asunción: Litocolor