

## **Geometría y Trigonometría**

### **Fundamentación**

El estudio de la Geometría aporta una formación lógica y una mayor comprensión en las lecturas, por esto y más, es que “enseña a razonar”. El hábito adquirido durante su estudio resulta provechoso pues, además de ayudar a apreciar los trabajos humanos y lo que ofrece la naturaleza, abarca un dilatado radio en cuanto a aplicaciones. Ellas se relacionan con la aeronáutica, arquitectura, aviación, con el amplio mundo de las ingenierías, ciencias físicas y con una miscelánea de situaciones cada vez más complejas.

En tanto que la Trigonometría, una creación de la matemática griega, surgió debido a las necesidades de la astronomía. Se desarrolló a lo largo de varios siglos y hoy en día compone uno de los instrumentos imprescindibles en diversas áreas: en todas las ramas de la ingeniería, en física, en topografía, en astronomía, etc.

Por lo expuesto, la adquisición de un sólido conocimiento en Geometría y Trigonometría será de gran utilidad en las carreras técnicas o científicas.

### **Objetivos**

- Distinguir los entes geométricos fundamentales.
- Establecer las posiciones relativas de dos rectas en el plano y las propiedades de los ángulos determinados por dos rectas paralelas y una transversal.
- Comprender el concepto de ángulo y los distintos sistemas de medición de ángulos.
- Relacionar los distintos sistemas de medición de ángulos.
- Definir triángulo, indicando sus elementos.
- Establecer las propiedades de los triángulos.
- Conocer las principales líneas y puntos notables de un triángulo y sus propiedades.
- Conocer los conceptos de razones y proporciones de segmentos.
- Aplicar semejanza de triángulos en la determinación de longitudes de lados y medidas angulares de un polígono.
- Reconocer triángulos congruentes utilizando los postulados de congruencia.
- Definir polígono en el plano, indicando sus elementos.
- Establecer las propiedades de los polígonos.
- Conocer las propiedades de los elementos que se asocian a la circunferencia y al círculo.
- Estudiar las propiedades de los ángulos que se pueden trazar en la circunferencia.
- Diferenciar las posiciones relativas entre una circunferencia y una recta, y entre dos circunferencias.
- Describir las características de polígonos y cuerpos.
- Distinguir figuras geométricas y cuerpos geométricos.
- Hallar área de figuras planas y de superficies de poliedros y cuerpos redondos.
- Calcular volúmenes de poliedros y cuerpos redondos.
- Definir razones y funciones trigonométricas.
- Conocer las propiedades de las funciones trigonométricas.
- Relacionar las funciones trigonométricas de un mismo arco y de los múltiplos y submúltiplos del arco.
- Aplicar fórmulas trigonométricas en ejercicios y problemas.
- Efectuar transformaciones de fórmulas trigonométricas.
- Verificar identidades trigonométricas.
- Resolver ecuaciones trigonométricas.
- Resolver ejercicios y problemas de triángulos rectángulos
- Resolver ejercicios y problemas de triángulos oblicuángulos.

### **Unidades Programáticas**

1. Entes geométricos fundamentales
2. Polígonos. Nociones generales
3. Triángulos
4. Cuadriláteros
5. Proporcionalidad Geométrica
6. Circunferencia y círculo
7. Áreas de figuras planas
8. Cuerpos geométricos
9. Trigonometría. Nociones preliminares
10. Razones y funciones trigonométricas
11. Relaciones entre funciones trigonométricas
12. Identidades y ecuaciones trigonométricas
13. Resolución de triángulos

## Contenido

1. Entes geométricos fundamentales
  - 1.1. Representaciones gráficas y notaciones: Punto, Recta, Semirrecta, Segmento de recta, Plano.
  - 1.2. Posiciones entre rectas
    - 1.2.1. Rectas paralelas. Notación
    - 1.2.2. Rectas perpendiculares. Notación
    - 1.2.3. Rectas coincidentes
    - 1.2.4. Rectas cortadas por una secante
      - 1.2.4.1. Rectas paralelas cortadas por una secante
  - 1.3. Ángulo
    - 1.3.1. Definición. Elementos. Notación
    - 1.3.2. Sistemas de Medida de ángulos: sexagesimal, centesimal, radián
      - 1.3.2.1. Conversión de la medida de un ángulo de un sistema a otro
    - 1.3.3. Ángulo cóncavo y ángulo convexo
    - 1.3.4. Clasificación de ángulos
      - 1.3.4.1. Según su medida: Ángulo nulo, ángulo agudo, ángulo recto, ángulo obtuso, ángulo llano y ángulo completo
      - 1.3.4.2. Según su posición: Ángulos adyacentes, ángulos consecutivos, ángulos opuestos por el vértice
    - 1.3.5. Ángulos complementarios y suplementarios
    - 1.3.6. Ángulos opuestos por el vértice
    - 1.3.7. Bisectriz de un ángulo
2. Polígonos. Nociones generales
  - 2.1. Definición. Notación
  - 2.2. Elementos de un polígono: lados, vértices, ángulos internos, ángulos externos, diagonales.
  - 2.3. Polígono cóncavo y polígono convexo
  - 2.4. Perímetro. Definición.
  - 2.5. Nombre de polígonos (según el número de lados)
  - 2.6. Polígono regular
    - 2.6.1. Definición
    - 2.6.2. Elementos de un polígono regular: centro, radio, apotema, ángulo central
  - 2.7. Propiedades
    - 2.7.1. Suma de los ángulos internos y externos de un polígono
    - 2.7.2. Número de diagonales de un polígono que se pueden trazar a partir de un vértice
    - 2.7.3. Número (total) de diagonales de un polígono
  - 2.8. Descomposición de polígonos en polígonos más sencillos
3. Triángulos
  - 3.1. Definición. Notación
  - 3.2. Elementos de un triángulo
  - 3.3. Propiedades básicas de un triángulo
  - 3.4. Clasificación y propiedades de los triángulos:
    - 3.4.1. Según sus lados
      - 3.4.1.1. Escaleno
      - 3.4.1.2. Isósceles
      - 3.4.1.3. Equilátero
    - 3.4.2. Según sus ángulos
      - 3.4.2.1. Rectángulo
      - 3.4.2.2. Acutángulo
      - 3.4.2.3. Obtusángulo
      - 3.4.2.4. Equiángulo
  - 3.5. Líneas notables en el triángulo
    - 3.5.1. Mediana
    - 3.5.2. Altura
    - 3.5.3. Bisectriz
    - 3.5.4. Mediatriz
  - 3.6. Puntos notables en el triángulo
    - 3.6.1. Baricentro
    - 3.6.2. Ortocentro
    - 3.6.3. Incentro
    - 3.6.4. Circuncentro
  - 3.7. Propiedades referentes a líneas y puntos notables.
4. Cuadriláteros
  - 4.1. Definición. Notación
  - 4.2. Clasificación
    - 4.2.1. Paralelogramos

- 4.2.1.1. Propiedades generales
  - 4.2.1.2. Clasificación y propiedades particulares
    - 4.2.1.2.1. Rectángulo
    - 4.2.1.2.2. Cuadrado
    - 4.2.1.2.3. Rombo
    - 4.2.1.2.4. Romboide
  - 4.2.2. Trapecios
    - 4.2.2.1. Propiedades generales
    - 4.2.2.2. Clasificación y propiedades particulares
      - 4.2.2.2.1. Trapecio Escaleno
      - 4.2.2.2.2. Trapecio Isósceles
      - 4.2.2.2.3. Trapecio Rectángulo
  - 4.2.3. Trapezoides
    - 4.2.3.1. Propiedades generales
    - 4.2.3.2. Clasificación y propiedades particulares
      - 4.2.3.2.1. Trapezoide Simétrico
      - 4.2.3.2.2. Trapezoide Asimétrico
- 5. Proporcionalidad Geométrica**
  - 5.1. Definición de razón entre dos segmentos
  - 5.2. Segmentos proporcionales
    - 5.2.1. Definición. Elementos
  - 5.3. Propiedades de las proporciones
    - 5.3.1. Aritméticas
    - 5.3.2. Cuarta proporcional
    - 5.3.3. Tercera proporcional
    - 5.3.4. Media proporcional
    - 5.3.5. Series de razones iguales
  - 5.4. Propiedades sobre segmentos proporcionales
    - 5.4.1. Teorema de Thales
    - 5.4.2. Propiedad de base media en un triángulo
    - 5.4.3. Propiedad de la bisectriz en un triángulo
  - 5.5. Semejanza de triángulos
    - 5.5.1. Definición
    - 5.5.2. Criterios de semejanza de triángulos
      - 5.5.2.1. Criterio AA (ángulo, ángulo)
      - 5.5.2.2. Criterio LAL (lado, ángulo, lado)
      - 5.5.2.3. Criterio LLL (lado, lado, lado)
      - 5.5.2.4. Criterio LLA (lado, lado, ángulo)
    - 5.5.3. Proporcionalidad de las alturas de dos triángulos semejantes
  - 5.6. Congruencia de triángulos
    - 5.6.1. Postulados de congruencia de triángulos
      - 5.6.1.1. Postulado ALA (ángulo, lado, ángulo)
      - 5.6.1.2. Postulado LAL (lado, ángulo, lado)
      - 5.6.1.3. Postulado LLL (lado, lado, lado)
  - 5.7. Relaciones métricas en el triángulo rectángulo
    - 5.7.1. Proyección de un punto y de un segmento sobre una recta
    - 5.7.2. Teorema de Euclides
    - 5.7.3. Teorema de Pitágoras
    - 5.7.4. Teorema general de Pitágoras
  - 5.8. Criterios de clasificación de triángulos conociendo las medidas de sus lados
    - 5.8.1. Rectángulo
    - 5.8.2. Acutángulo
    - 5.8.3. Obtusángulo
- 6. Circunferencia y círculo**
  - 6.1. Definición de circunferencia y de círculo
  - 6.2. Elementos de una circunferencia
    - 6.2.1. Arco
    - 6.2.2. Cuerda
    - 6.2.3. Radio
    - 6.2.4. Diámetro
  - 6.3. Posiciones de puntos a la circunferencia
    - 6.3.1. Puntos interiores
    - 6.3.2. Puntos exteriores
    - 6.3.3. Puntos de la circunferencia
  - 6.4. Circunferencias iguales
  - 6.5. Longitud de arco

- 6.6. Longitud de arco de una circunferencia(Perímetro)
  - 6.7. Semicircunferencias y semicírculos
  - 6.8. Posiciones de una recta y una circunferencia
    - 6.8.1.Recta tangente a una circunferencia.
    - 6.8.2.Recta secante a una circunferencia
    - 6.8.3.Recta exterior a una circunferencia
  - 6.9. Ángulos en la circunferencia.
    - 6.9.1.Ángulo central
    - 6.9.2.Ángulo inscripto
    - 6.9.3.Ángulo semi-inscripto
    - 6.9.4.Ángulo ex-inscripto
    - 6.9.5.Ángulo interior
    - 6.9.6.Ángulo circunscripto
    - 6.9.7.Ángulo exterior
  - 6.10. Posiciones relativas de dos circunferencias.
    - 6.10.1. Circunferencias exteriores
    - 6.10.2. Circunferencias tangentes
    - 6.10.3. Circunferencias secantes
    - 6.10.4. Circunferencias interiores
    - 6.10.5. Circunferencias concéntricas
  - 6.11. Circunferencias y polígonos
    - 6.11.1. Polígonos inscriptos en una circunferencia
      - 6.11.1.1.Polígono regular inscripto en una circunferencia
    - 6.11.2. Polígonos circunscriptos a una circunferencia
      - 6.11.2.1.Polígono regular circunscripto a una circunferencia
    - 6.11.3. Relaciones métricas en polígonos regulares
- 7. Áreas de figuras planas**
- 7.1. Definición de área
  - 7.2. Figuras planas equivalentes
  - 7.3. Área de triángulos
  - 7.4. Área de cuadriláteros
  - 7.5. Área de polígonos de más de cuatro lados
  - 7.6. Área de un círculo
  - 7.7. Área de figuras en el círculo
    - 7.7.1.Sector circular
    - 7.7.2.Segmento circular
    - 7.7.3.Trapezio circular
    - 7.7.4.Corona circular
- 8. Cuerpos Geométricos**
- 8.1. Definición de cuerpo geométrico o sólido
  - 8.2. Volumen y Capacidad. Definiciones
  - 8.3. Sólidos equivalentes
  - 8.4. Sección de un sólido
  - 8.5. Poliedros
    - 8.5.1.Definición
    - 8.5.2.Elementos de un poliedro
    - 8.5.3.Teorema de Euler para poliedros
    - 8.5.4.Poliedro regular. Propiedades y Fórmulas
      - 8.5.4.1. Tetraedro: Área lateral, área total y volumen
      - 8.5.4.2. Hexaedro o cubo: Área lateral, área total y volumen
      - 8.5.4.3. Octaedro: Área total y volumen
      - 8.5.4.4. Dodecaedro: Área total y volumen
      - 8.5.4.5. Icosaedro: Área total y volumen
    - 8.5.5.Clasificación, propiedades y fórmulas de poliedros
      - 8.5.5.1. Prisma recto
        - 8.5.5.1.1. Definición
        - 8.5.5.1.2. Elementos
        - 8.5.5.1.3. Paralelepípedo
        - 8.5.5.1.4. Prisma recto regular
        - 8.5.5.1.5. Área lateral, área total y volumen
      - 8.5.5.2. Pirámide recta regular
        - 8.5.5.2.1. Elementos
        - 8.5.5.2.2. Área lateral, área total y volumen
      - 8.5.5.3. Tronco de pirámide recta regular
        - 8.5.5.3.1. Elementos
        - 8.5.5.3.2. Área lateral, área total y volumen

#### 8.5.5.4. Aplicación del teorema de Pitágoras en Poliedros

### 8.6. Cuerpos redondos

#### 8.6.1. Definición

#### 8.6.2. Clasificación, propiedades y fórmulas de cuerpos redondos

##### 8.6.2.1. Cilindro recto circular

###### 8.6.2.1.1. Elementos

###### 8.6.2.1.2. Área lateral, área total y volumen

##### 8.6.2.2. Cono recto circular

###### 8.6.2.2.1. Elementos

###### 8.6.2.2.2. Área lateral, área total y volumen

##### 8.6.2.3. Tronco de cono recto circular

###### 8.6.2.3.1. Elementos

###### 8.6.2.3.2. Área lateral, área total y volumen

##### 8.6.2.4. Esfera

###### 8.6.2.4.1. Elementos

###### 8.6.2.4.2. Área total y volumen

#### 8.6.3. Aplicación del Teorema de Pitágoras en Cuerpos Redondos

### 9. Trigonometría. Nociones preliminares

#### 9.1. Sistemas de ejes

##### 9.1.1. Coordenadas rectangulares

##### 9.1.2. Coordenadas de un punto

#### 9.2. Ángulos desde el punto de vista trigonométrico

##### 9.2.1. Ángulo positivo

##### 9.2.2. Ángulo negativo

##### 9.2.3. Ángulo en posición normal

##### 9.2.4. Ángulos coterminales

### 10. Razones y funciones trigonométricas

#### 10.1. Razones, razones recíprocas y co-razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.

#### 10.2. Circunferencia trigonométrica

#### 10.3. Líneas trigonométricas

#### 10.4. Funciones trigonométricas

#### 10.5. Funciones recíprocas y cofunciones de las funciones trigonométricas

#### 10.6. Dominio, variación, periodo, signos, raíces y gráfica de las funciones trigonométricas

#### 10.7. Funciones trigonométricas de los ángulos que limitan los cuadrantes

#### 10.8. Funciones trigonométricas de los ángulos notables. Aplicaciones de los valores de ángulos notables en operaciones aritméticas.

#### 10.9. Funciones trigonométricas inversas

### 11. Relaciones entre funciones trigonométricas

#### 11.1. Reducción de funciones trigonométricas a otras equivalentes.

##### 11.1.1. Funciones trigonométricas del ángulo $(-x)$

##### 11.1.2. Funciones trigonométricas del ángulo $(\pi/2 \pm x)$

##### 11.1.3. Funciones trigonométricas del ángulo $(\pi \pm x)$

##### 11.1.4. Funciones trigonométricas del ángulo $((3\pi)/2 \pm x)$

##### 11.1.5. Funciones trigonométricas del ángulo $(2\pi \pm x)$

#### 11.2. Otras relaciones importantes

### 12. Identidades y ecuaciones trigonométricas

#### 12.1. Identidad trigonométrica. Definición

##### 12.1.1. Identidades recíprocas

##### 12.1.2. Identidades pitagóricas

##### 12.1.3. Identidades de la suma de dos ángulos

##### 12.1.4. Identidades de la diferencia de dos ángulos

##### 12.1.5. Identidades del ángulo doble

##### 12.1.6. Identidades del ángulo triple

##### 12.1.7. Identidades del ángulo mitad

##### 12.1.8. Transformaciones de sumas de senos, cosenos y tangentes en producto

##### 12.1.9. Transformaciones de diferencias de senos, cosenos y tangentes en producto

##### 12.1.10. Aplicación de las identidades trigonométricas a los más variados tipos de expresiones trigonométricas.

#### 12.2. Ecuación trigonométrica. Definición

##### 12.2.1. Resolución de los más variados tipos de ecuaciones trigonométricas

- 13. Resolución de triángulos
  - 13.1. Resolución de triángulos rectángulos.
    - 13.1.1. Aplicación de las razones trigonométricas
    - 13.1.2. Ángulo de elevación
    - 13.1.3. Ángulo de depresión
  - 13.2. Resolución de triángulos oblicuángulos
    - 13.2.1. Teorema del seno
    - 13.2.2. Teorema del coseno
    - 13.2.3. Aplicación de los teoremas del seno y coseno a situaciones problemáticas

#### **Modalidades de enseñanza**

- Clase teórico-práctica

#### **Métodos de enseñanza**

- Exposición
- Demostración
- Aprendizaje cooperativo
- Resolución de ejercicios
- Trabajo Individual

#### **Recursos didácticos**

- Pizarra
- Marcador
- Borrador
- Figuras planas y cuerpos geométricos en cartulinas
- Materiales bibliográficos
- Internet

#### **Bibliografía**

- Giovanni, J., Bonjorno, J., Giovanni, J.Jr. y Acosta, R. (2005). *Matemática Fundamental: volumen único*. São Paulo: FTD.
- Baldor, J. (2004). *Geometría plana y del espacio: con una introducción a la trigonometría*. México: Grupo Patria Cultural.
- Dolce, O. y Pompeo, J. (2005). *Fundamentos de Matemática Elemental: geometría plana*. São Paulo: Atual.
- Dolce, O. y Pompeo, J. (2013). *Fundamentos de Matemática Elemental: geometría espacial*. São Paulo: Atual.
- Iezzi, G. (1998). *Fundamentos de Matemática Elemental: trigonometría*. São Paulo: Atual.
- Alexander, D., & Koeberlein, G. (2013). *Geometría* (Quinta ed.). (J. L. Cárdenas, Trans.) México: Cengage Learning.
- Campos, X. C., & Schmidt, X. C. (2012). *Geometría* (Segunda ed.). Santiago, Chile: McGraw-Hill.
- Moise, E. E., & Floy L. Downs, J. (1986). *Geometría Moderna*. (M. García, Trans.) Wilmington, Delaware, Estados Unidos: Addison-Wesley.
- Dante, L. R. (2002). *Matemática*. Sao Paulo, Brasil: Ática.
- Aguilar, A., Bravo, F., Gallegos, H., Cerón, M. y Reyes, R. (2009). *Matemáticas simplificadas* (3era. ed.). México: PEARSON EDUCACIÓN.
- Secchia, A. y Montiel, S. (1980). *Problemas de Geometría: Geometría Plana*. Asunción: Comuneros
- Secchia, A. y Montiel, S. (1979). *Problemas de Geometría: Geometría del Espacio*. Asunción: Comuneros.
- Secchia, A. y Pujol, F. (1979). *Ejercicios de Trigonometría*. Asunción: Comuneros.
- Repetto, C. y Fesquet, H. (1968). *Trigonometría y Elementos de Análisis Matemático*. Buenos Aires: Kapelusz.
- Velázquez, M., Bellassai, P., Pino, R., Duré, A., Aranda, T. (2010). *Matemática Básica con Estadística* (4ta. ed.). Asunción: Litocolor